数理解析研究所講究録
711巻 1989年 1-7

Strong Dugundji spaces と strong Milutin spaces について

大阪教育大学 数理科学 小山 晃 (Akira Koyama)

ここで考える spaces は 特にことわらない限り compact Hausdorff spaces, maps は continuous functions を意味するものとする。

space X に対して、関数空間

$C(X)$ = (the space of all real-valued maps of X with the compact-open top.)

$C_p(X)$ = (the space of all real-valued maps of X with the pointwise convergence top.)

とする。関数空間 $C(X)$ の分類 については 次のような強力な結果がある。

定理 1 (Milutin). 任意の uncountable compact metric space X に対して、

$C(X) \sim C(D^{\aleph_0})$, ただし、$D = \{0, 1\}$ とする。

ここで、$\sim$ は Banach spaces or linear spaces として isomorphic であることを表わす。

Milutin の結果 及び 手法を整理, 単純化 及び 一般化したものに、Pełczyński [2] がある。その際、Dugundji spaces, Milutin spaces の概念

が定式化され、彼らの結果の key points になっている。最初に、その定義を与える。

定義 1、 space X が Dugundji space であるとは、任意の embedding $\varphi: X \longrightarrow I^{\tau}$ に対して、

regular extension operator $u: C(X) \longrightarrow C(I^{\tau})$

i.e. (1) continuous, positive definite & $u(1_X) = 1_{I^{\tau}}$ (regular 性)

(2) 任意の $f \in C(X)$ に対して、$C(\varphi) \circ u(f) = f$

が存在することをいう。

space X が Milutin space であるとは、

map $\varphi: D^{\tau} \xrightarrow{\text{onto}} X$ & regular averaging operator $u: C(D^{\tau}) \longrightarrow C(X)$

i.e. (3) 任意の $f \in C(X)$ に対して、$u \circ C(\varphi)(f) = f$

が存在することをいう。

この概念について、いろいろな結果がだされているが、Dugundji spaces に関する代表的な特徴づけを紹介する。

定理 2 (Haydon). space X について次は同値である。

1) X が $AE(0)$ である。

2) continuous, well-ordered inverse system $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta, A\}$

s.t. $p_{\alpha,\alpha+1}: X_{\alpha+1} \longrightarrow X_\alpha$, $\alpha \in A$, が metrizable kernel をもつ open map

$$\text{令}\ X = \varprojlim \{X_\alpha, p_\alpha^\beta, A\}$$

が存在する。

3) X は Dugundji space である。

space X に対し、

$$P(X) = (\text{the space of all probability measures on } X) \subseteq \mathbb{R}^{C(X)}$$

とすると、おのおのの $x \in X$ について、the dirac measure $\delta_x \in P(X)$ を対応させることにより、X は $P(X)$ に embed できる。

定理3 (Shchepin) space X が Dugundji space である必要十分条件は、任意の embedding $X \hookrightarrow Y$ に対し、

$$\text{map } R : Y \longrightarrow P(X) \text{ s.t. } R(x) = x\ (=\delta_x) \text{ for all } x \in X$$

が存在することである。

上の条件をみたすとき、X は absolute P-valued retract であるという。

ここでは、上述の結果を参照にして、関数空間 $C_p(X)$ に Dugundji spaces, Milutin spaces の概念を導入し、対応する結果を、

A. N. Dranishnikov, Absolute F-valued retracts and spaces of functions in the topology of pointwise convergence, Sib. Mat. 27(3)(1986), 74-86

から紹介する。

定義2. space X が strong Dugundji space であるとは、任意の embedding $\varphi: X \longrightarrow I^\tau$ に対して、

regular extension operator $u: C_p(X) \longrightarrow C_p(I^\tau)$ for φ

が存在することをいう。

space X に対して、

$P_\omega(X)$ = (the space of all probability measures on X with finite supports) $\subseteq P(X)$

とすると、$x \longmapsto \delta_x$ により、X は $P_\omega(X)$ に embed できる。(定理3) に対応して、次の特徴づけが得られる。

定理4. space X が strong Dugundji space である必要十分条件は、任意の embedding $X \hookrightarrow Y$ に対して、

map $R_\omega: Y \longrightarrow P_\omega(X)$ s.t. $R_\omega(x) = x\ (=\delta_x)$ for all $x \in X$

が存在することである。

上の条件をみたすとき、X は absolute P_ω-valued retract であるという。

系1. strong Dugundji spaces は Dugundji spaces である。

系1の逆が成り立たないこと、すなわち、strong Dugundji spaces が新しい notion であることは、次のことからわかる。

定理5. compact metric space K について. K^τ, $\tau > \aleph_1$, が strong Dugundji space ならば K は AR である。

定理5の証明には Shchepin による spectral theorem [3] が効果的に利用されており, $\tau > \aleph_1$ が essential である。実際, $\tau = \aleph_1$ の場合に定理5が成り立つか未解決である。

一方, Haydon [1] の結果に対応して次のことがいわれる。

定理6. strong Dugundji space X について,

σ-spectrum $\{X_\alpha, p_\alpha^\beta, A\}$ s.t. X_α : compact metric spaces

$\quad p_\alpha^\beta : X_\beta \longrightarrow X_\alpha$ open maps

$$X = \varprojlim \{X_\alpha, p_\alpha^\beta, A\}$$

が存在する。

定理6と定理2を用いても系1が得られる。ところが, 定理6の逆が成り立たないことは定理5から直ちにわかる。実際, strong Dugundji spaces を inverse systems の展開によって特徴づけることは未解決である。

次に Milutin spaces を関数空間 $C_p(X)$ で考える。

定義3. space X が strong Milutin であるとは,

map $g : D^\tau \xrightarrow{\text{onto}} X$ と regular averaging operator $u : C_p(D^\tau) \longrightarrow C_p(X)$

が存在することをいう。

関数空間 $C(X)$ では、regular averaging operators, すなわち、Milutin spaces, の概念が非常に有効であったが、関数空間 $C_p(X)$ については、Milutin の概念がかなり空間の範囲を限定にしまう。実際、次のことがわかる。

定理7. strong Milutin spaces は zero-dimensional である。

このことは、strong Milutin spaces の概念と Pavlovski の結果

$$C_p(X) \sim C_p(Y) \Longrightarrow \dim X = \dim Y$$

を考えあわせれば、予想のつくことだが、regular averaging operators が $C_p(X)$ の理論では有効に働くかどうか疑問を与えることになる。

また、具体的に、$C_p(X)$ の構造を考えるために、

$C_p(D^n)$, ただし、D^n は n-次元球部

を考えることが基本であり、重要であることが次のことから知られる。

定理8. 任意の non-empty open subset $U \subset \mathbb{R}^n$ に対し

$$C_p(U) \sim C_p(D^n)^{\aleph_0}$$

$C_p(X)$ の理論でも、Archangelskii に関連するものだけでなく、より具体的に構造を考えることが望ましいと考えている。これもその試みと考えてよいだろう。

参考文献

[1] R. Haydon, On a problem of Pełczyński: Milyutin spaces, Dugundji spaces, and AE(0-dim), Studia Math. 52(1974), 23-51

[2] A. Pełczyński, Linear extensions, linear averagings and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions, Dissertationes Math. 58 (1968).

[3] E. V. Shchepin, Functors and uncountable powers of compacta, Russian Math. Surveys, 36:3 (1981), 1-71